

Coexistence d'attracteurs et crises dans un laser à CO₂ à paramètres modulés

Didier DANGOISSE *

Pierre GLORIEUX *

Daniel HENNEQUIN *

Analyse

Le laser à CO₂, dont on module les pertes ou la fréquence, présente une cascade de doublements de période qui culmine dans le chaos. On montre ici que ce système possède plusieurs attracteurs et on discute de différents phénomènes liés à la coexistence ou l'interaction de ces attracteurs : bistabilité généralisée et crises. Un modèle simple du laser CO₂ permet une simulation numérique qui reproduit l'essentiel des résultats expérimentaux.

Mots clés : Chaos, Attracteur étrange, Laser gaz, Carbone dioxyde, Instabilité, Modulation, Bistabilité, Etude expérimentale, Théorie bifurcation, Simulation numérique.

COEXISTING ATTRACTORS AND CRISIS IN CO₂ LASERS WITH MODULATED PARAMETERS

Abstract

The CO₂ laser with modulated losses or frequency exhibits a period-doubling cascade culminating in chaos. This system is shown to converge towards various attractors and phenomena related to the coexistence and interaction of the attractors, in particular generalized bistability and crisis have been observed. The numerical simulation based on a very simplified model of the CO₂ laser reproduces well most of the experimental results.

Key words : Chaos, Strange attractor, Gas laser, Carbon dioxide, Instability, Modulation, Bistability, Experimental study, Bifurcation theory, Numerical simulation.

Sommaire

- I. Introduction.
 - II. Dispositif expérimental.
 - III. Bistabilité généralisée.
 - IV. Crises.
- Bibliographie (12 réf.).

I. INTRODUCTION

Dès la réalisation des premiers lasers, des fluctuations spontanées de l'intensité émise ont souvent été observées bien que ce phénomène ait été complètement inattendu [1, 2]. Ce n'est que récemment qu'un courant de recherche important s'est développé pour tenter de comprendre l'origine physique de ces instabilités et essayer d'en identifier les éventuelles applications [3]. Il est cependant remarquable que dès le début des années 60, on ait reconnu que les effets non linéaires dynamiques pouvaient jouer un rôle significatif dans la naissance des pulsations spontanées des lasers [4]. Ces dernières années, de telles idées ont été redéveloppées et généralisées, profitant de l'impulsion donnée par les avancées dans le domaine de la dynamique des systèmes non linéaires. Les instabilités dans les lasers apparaissent alors comme l'une des manifestations d'effets présentant des analogies dans une grande variété de systèmes physiques, chimiques [5] ...

Parmi les systèmes lasers présentant des instabilités et du chaos, le laser à CO₂ à paramètres modulés possède une originalité et un intérêt basés sur deux points : d'une part, c'est un système bien adapté aux études physiques car il fournit un rayonnement cohérent et sa modélisation est de plus relativement aisée et performante, d'autre part, il s'agit d'un

* Laboratoire de spectroscopie hertzienne associé au CNRS, Université de Lille I, 59655 Villeneuve-d'Ascq Cedex.

dispositif ayant des applications pratiques dans toutes les situations où l'on doit disposer d'un rayonnement infrarouge modulé.

Une grande variété de phénomènes chaotiques a été obtenue sur le laser à CO₂ à paramètres modulés : transition vers le chaos par cascade de doublements de période [6], cascade sous harmonique inverse [7], influence du bruit et déformation dynamique des diagrammes de bifurcation [7, 8, 9], bistabilité généralisée, crise... Dans cet article, on s'attachera essentiellement à présenter ces deux derniers phénomènes. On décrira à la fois leur manifestation expérimentale et la façon dont ils apparaissent dans les simulations numériques réalisées sur un modèle extrêmement simple du laser CO₂.

II. DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

Le laser à CO₂ utilisé pour ces expériences a déjà été décrit en détail par ailleurs. Il est essentiellement formé d'un tube à décharge de 20 cm de long et de 2 mm de diamètre, dans lequel le mélange actif (CO₂, CO, He, Xe) est à une pression d'environ 50 torr. L'élargissement homogène dû aux collisions moléculaires l'emporte donc nettement sur le terme inhomogène lié à l'effet Doppler. L'intervalle spectral libre de la cavité est de 500 MHz et le mode a habituellement une largeur de l'ordre de 200 MHz.

Un modulateur élasto-optique à ZnSe est inséré dans la cavité optique. Suivant la fréquence à laquelle il est excité, différents modes de vibration du cristal peuvent entrer en résonance. Le choix d'une fréquence d'excitation adaptée permet d'utiliser le dispositif en modulation d'amplitude ou de fréquence. Si c'est la dépolarisation liée à la biréfringence induite par contrainte qui l'emporte, le dispositif fonctionne en modulateur des pertes de la cavité optique. Si au contraire, c'est la variation de la longueur optique du cristal qui est l'effet prépondérant, on observera essentiellement de la modulation de fréquence.

Un détecteur photovoltaïque en HgCdTe permet de surveiller les variations de la puissance émise par le laser. Le signal qu'il fournit est soit stocké dans un oscilloscope numérique, soit traité par un échantillonneur bloqueur synchronisé sur le générateur pilotant le modulateur élasto-optique. La sortie de l'échantillonneur étant ensuite lue sur oscilloscope ou ordinateur. Au moyen de l'échantillonneur-bloqueur, on réalise une vision stroboscopique de l'intensité émise par le laser qui s'avère extrêmement utile pour la visualisation des diagrammes de bifurcation du laser à pertes ou à fréquence modulées. En échantillonnant à la période de modulation T , une réponse T périodique du laser sera caractérisée par une réponse unique à la sortie de l'échantillonneur, tandis qu'à une réponse nT périodique, correspondront n valeurs. En reportant la tension de

sortie de l'échantillonneur en fonction de l'amplitude d'un paramètre de contrôle, on peut ainsi visualiser simplement les bifurcations du système étudié.

III. BISTABILITÉ GÉNÉRALISÉE

Dans un laser à CO₂ à pertes ou fréquence modulées, la transition vers le chaos s'effectue par une cascade de doublements de période très semblable à celle de la suite logistique $x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2$, où μ est le paramètre de contrôle. La transition vers le chaos dans ce type de laser a déjà été décrite précédemment dans plusieurs articles, où la possibilité de bistabilité généralisée a été abordée. Dans ce paragraphe, cet effet est mis en évidence et une modélisation simple du laser permet de comparer les résultats d'une simulation numérique à ceux effectivement observés.

La figure 1 donne des exemples de diagramme de bifurcation (DB) obtenus sur un laser à CO₂ quand on fait varier l'amplitude V de la tension sinusoïdale appliquée au modulateur. Ces diagrammes de bifur-

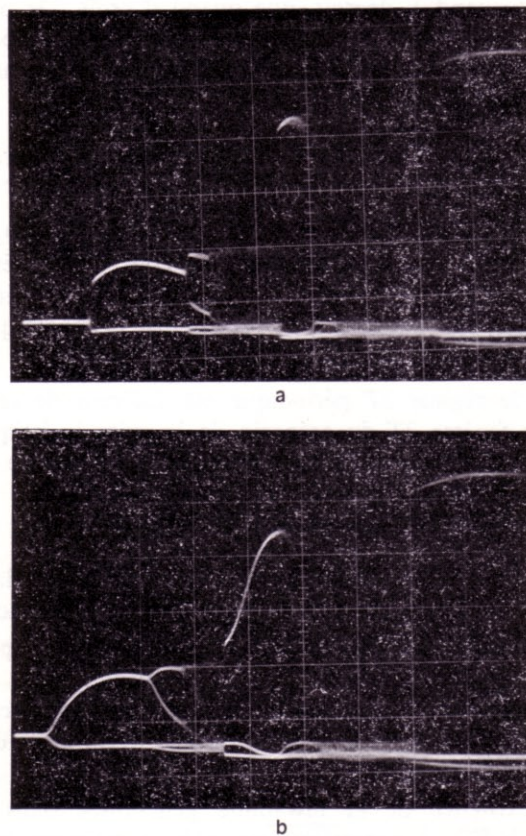


FIG. 1. — Mise en évidence expérimentale de la bistabilité généralisée. Diagrammes de bifurcation obtenus à amplitude de modulation croissante (a) et décroissante (b). Les diagrammes présentés sont légèrement déformés par un effet de passage rapide qui étend les zones de bistabilité généralisée.

Experimental evidence of generalized bistability. Bifurcation diagrams obtained with increasing (a) or decreasing (b) modulation amplitude. Diagrams are slightly distorted by a fast scanning effect spreading the regions of generalized bistability.

cation dépendent évidemment aussi des conditions de fonctionnement du laser et notamment du gain et du désaccord de la cavité.

Aux faibles amplitudes de modulation, la réponse du laser est linéaire et la puissance infrarouge modulée sinusoïdale. Dans le diagramme présenté à la figure 1, ceci correspond à la région pour laquelle une seule valeur est fournie par l'échantillonneur.

On observe à V croissant, une succession de régime $2T$, $4T$, $8T$, puis irrégulier avec une pseudorégularité $4T$, puis $2T$, puis toute régularité semble perdue. Pour des modulations plus importantes, un régime $3T$ périodique apparaît brutalement, puis un comportement $6T$ périodique est observé et de nouveau un signal irrégulier, dont l'analyse spectrale prouve qu'il a une nature différente de celle du signal irrégulier observé pour des modulations plus faibles.

Contrairement au DB de la suite logistique, celui du laser diffère suivant le sens de variation du paramètre de contrôle, c'est-à-dire μ pour la suite, V pour le laser. La figure 1a et b illustre que les DB à paramètre de contrôle croissant (a) et décroissant (b) sont effectivement différents, en particulier dans la région voisine du régime $3T$. L'intervalle ΔV sur lequel apparaît ce régime est en effet beaucoup plus grand quand V décroît, que quand il croît. De plus la largeur de cette région est notablement plus importante que celle de la fenêtre $3T$ du DB de la suite logistique.

Les enregistrements présentés à la figure 1 montrent donc que :

— le régime de fonctionnement du laser à CO₂ à paramètres modulés présente un effet d'hystérésis, amenant à la coexistence de deux types de fonctionnement par exemple $3T$ périodique et chaotique, pour un même jeu de paramètres du laser ;

— le régime $3T$ périodique est différent de celui de la fenêtre $3T$ du scénario de la suite logistique, tant par l'importance du domaine de paramètre de contrôle où il apparaît, que par le phénomène de bistabilité dont on a parlé ci-dessus.

En fait, la bistabilité généralisée n'existe pas dans toutes les situations rencontrées dans les expériences.

Les effets de la bistabilité généralisée les plus flagrants sont observés lorsque la cavité laser est modérément désaccordée par exemple lorsque l'écart à la résonance est de l'ordre de 100 MHz pour une largeur de mode de 200 MHz.

L'existence de la bistabilité généralisée dans le laser à CO₂ à paramètres modulés se retrouve dans des simulations numériques effectuées sur la base du modèle à deux niveaux du laser déjà discuté précédemment. Dans le cadre de ce modèle, le comportement du laser est caractérisé par l'évolution de l'inversion de population D et de l'intensité émise I . L'évolution temporelle de ces grandeurs est régie par l'ensemble d'équations différentielles :

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{I} &= I \left(\frac{GD}{1 + \delta^2} - 2\kappa_0 \right), \\ \dot{D} &= \gamma_{II} \left(1 - D - \frac{DI}{1 + \delta^2} \right). \end{aligned}$$

où G est le gain associé à un seul système en inversion de population, κ_0 le temps d'amortissement du champ électrique dans la cavité, δ le désaccord de celle-ci par rapport au centre du profil de gain et γ_{II} la constante de temps de relaxation de l'inversion de population. Quand le modulateur élasto-optique induit essentiellement une modulation des pertes, le terme κ est une fonction sinusoïdale du temps :

$$\kappa = \kappa_0(1 + m \sin 2\pi ft).$$

Les paramètres du laser κ_0 et γ_{II} ont été évalués à $\kappa_0 = 6.10^7 \text{s}^{-1}$ et $\gamma_{II} = 2,5 \cdot 10^5 \text{s}^{-1}$, le premier d'après une estimation des pertes de la cavité, le second à partir des constantes données par Dupré *et al.* [11]. On s'est limité au domaine où m est inférieur à 0,035 et le paramètre de pompage $A = G/2K_0$ inférieur à 1,2, ce qui correspond à une demi-largeur de mode du laser $\delta_{\max} = 0,4$. De nombreuses simulations numériques ont été effectuées dans ces conditions sur le système d'équations 1 d'où il ressort que le rapport λ de la fréquence propre du système laser :

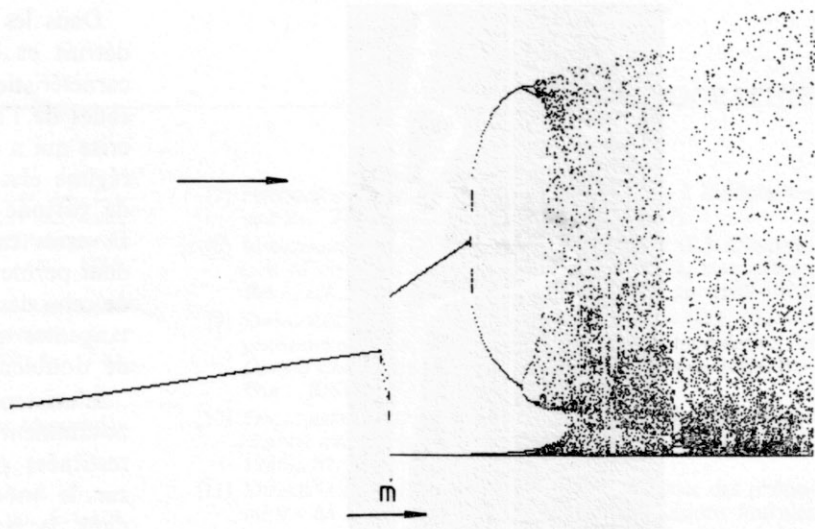
$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \left(2\kappa_0 \gamma_{II} \left(\frac{A}{1 + \delta^2} - 1 \right) \right)^{1/2}$$

à la fréquence de modulation f est un paramètre déterminant. f_0 est de l'ordre de 300 kHz pour $\delta = 0$. Toutes les courbes de simulation numérique présentées en figure 2 ont été obtenues dans les mêmes conditions, reproduisant au mieux la procédure expérimentale : la solution limite est calculée pour une valeur donnée du paramètre de contrôle et celle-ci est considérée comme condition initiale pour la valeur suivante du paramètre de contrôle. On montre que le cycle limite de période T est en général solution du système mais qu'il peut perdre sa stabilité par collision avec des cycles n mites instables, par exemple un attracteur cyclique de période $2T$, qui prend naissance par une bifurcation selle-nœud dans une région où la fréquence propre du système est voisine de la moitié de la fréquence d'excitation ($\lambda \cong 1/2$). Cette bifurcation selle-nœud engendre simultanément une orbite attractive de période 2 et un cycle instable de période 2 également. On observe alors de la bistabilité généralisée entre attracteurs 1 et 2 comme le montre la figure 3. Ceci permet aussi d'expliquer l'apparition d'une discontinuité dans le DB obtenu à m croissant, discontinuité qui n'est pas due à une bifurcation normale mais plutôt au saut d'un cycle limite de période T à un autre cycle limite de période $2T$, né précédemment dans une bifurcation selle-nœud et qui se produit pour une valeur du paramètre de contrôle où l'orbite de période $2T$ entre en collision avec l'attracteur $1T$ et le détruit.

D'autres attracteurs périodiques $3T$ ont aussi été détectés par exemple pour $\lambda = n/3$ avec $n = 1, 2, 3$.

FIG. 2. — Diagrammes de bifurcation obtenus par simulation numérique du laser CO₂ à paramètres modulés. L'amplitude de modulation est utilisée comme paramètre de contrôle. $\delta = 0,08$, $\gamma = 2,5 \cdot 10^5 s^{-1}$, $\kappa = 6 \cdot 10^7 s^{-1}$, $A = 1,1$, m varie par pas de $5 \cdot 10^{-5}$ (a) de 0 à 0,03 (b) de 0,03 à 0.

Bifurcation diagrams obtained by numerical simulation of a CO₂ laser with modulated parameters. The modulation amplitude is used as a control parameter. $\delta = 0.08$, $\gamma = 2.5 \cdot 10^5 s^{-1}$, $\kappa = 6 \cdot 10^7 s^{-1}$, $A = 1.1$, m changes by steps of $5 \cdot 10^{-5}$ from 0 to 0.03 (a) and from 0.03 to 0 (b).



Ils donnent aussi lieu à coexistence d'attracteurs et possèdent en commun d'être issus de bifurcations de type nœud-selle et de perdre leur stabilité par des séquences de doublement de période. Une étude plus complète des différents attracteurs du laser CO₂ à pertes modulées est actuellement en cours, sur la base du système d'équations 1 dont on vient de voir qu'il permet une description correcte au moins qualitativement des systèmes lasers réels : coexistence de plusieurs attracteurs, disparition de l'attracteur initial par collision avec d'autres attracteurs...

IV. CRISES

Les crises, modifications qualitatives brutales d'attracteurs caractérisant un système, sont dues à la collision d'un attracteur avec un point fixe ou une orbite périodique instable. Grebogi, Ott et Yorke distinguent deux types de crises : crise de frontière, si l'orbite ou le point fixe instables sont à la frontière du bassin d'attraction de l'attracteur chaotique et crise intérieure si ceux-ci apparaissent à l'intérieur du bassin d'attraction [12].

Trois méthodes s'avèrent utiles pour mettre en évidence ces crises : en plus de la visualisation du diagramme de bifurcation déjà utilisée précédemment, on peut aussi visualiser une projection plane de l'attracteur en reportant l'intensité I émise par le laser en fonction de sa dérivée temporelle \dot{I} ou tracer des sections de Poincaré où l'intensité I_n du n -ième maximum est reportée en fonction de celle du $(n + 1)$ -ième. C'est la première représentation qui sera utilisée ici, car c'est elle qui montre le plus clairement le caractère subit de la modification de l'attracteur. On trouvera les autres représentations dans un article antérieur sur les crises dans le laser CO₂ à paramètres modulés [10].

Les crises se manifestent dans le diagramme de bifurcation par l'apparition brutale de nouvelles

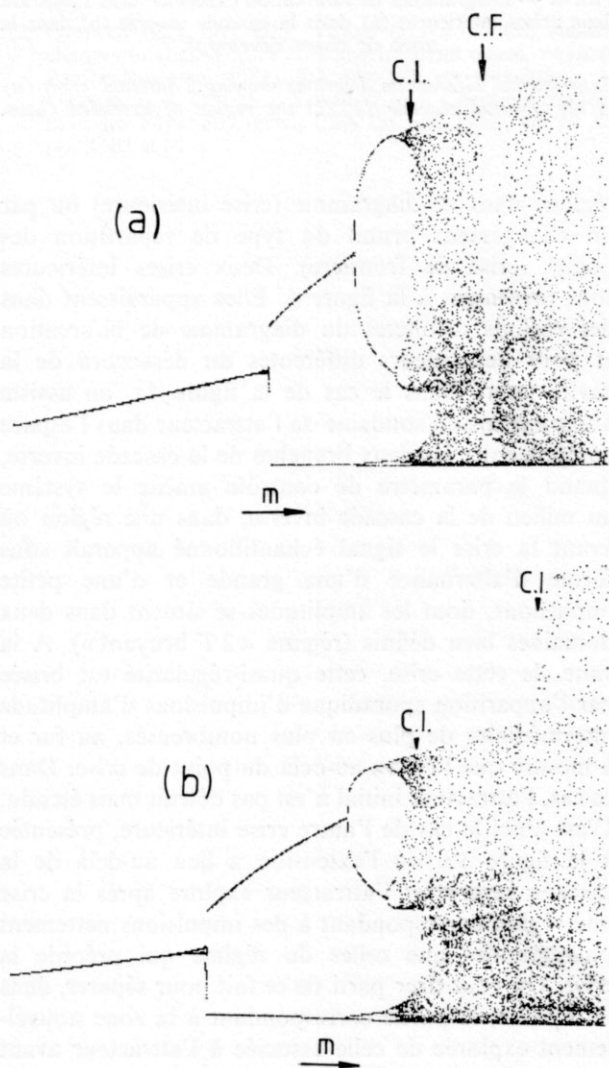


FIG. 3. — Diagrammes de bifurcation obtenus par simulation numérique avec $\gamma = 2,5 \cdot 10^5 s^{-1}$, $\kappa = 6 \cdot 10^7 s^{-1}$, $A = 1,1$ et montrant l'existence de crises intérieures (ci) et d'une crise de frontière (cf). m varie de 0 à 0,03 par pas de $5 \cdot 10^{-5}$. (a) $\delta = 0,12$ (b) $\delta = 0,16$.

Bifurcation diagrams obtained by numerical simulation with $\gamma = 2.5 \cdot 10^5 s^{-1}$, $\kappa = 6 \cdot 10^7 s^{-1}$, $A = 1.1$, showing the presence of internal crisis (ic) and of a border crisis (bf). m varies for 0 to 0.03 by steps of $5 \cdot 10^{-5}$. $\delta = 0.12$ (a) $\delta = 0.16$ (b).

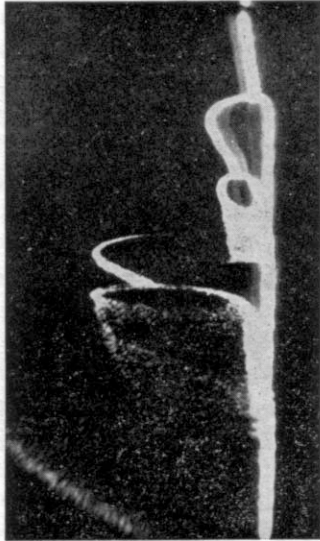


FIG. 4. — Diagrammes de bifurcation expérimentaux montrant deux crises intérieures (a) dans la cascade inverse (b) dans la zone de chaos développé.

Experimental bifurcation diagrams showing 2 internal crisis (a) in the inverted cascade (b) in the region of extended chaos.

régions dans ce diagramme (crise intérieure) ou par un changement brutal du type de répartition des points (crise de frontière). Deux crises intérieures sont présentées à la figure 4. Elles apparaissent dans des régions distinctes du diagramme de bifurcation et pour des valeurs différentes du désaccord de la cavité laser. Dans le cas de la figure 4a, on assiste à une expansion soudaine de l'attracteur dans l'espace compris entre les deux branches de la cascade inverse, quand le paramètre de contrôle amène le système au milieu de la cascade inverse, dans une région où avant la crise le signal échantillonné apparaît sous forme d'alternance d'une grande et d'une petite impulsions, dont les amplitudes se situent dans deux domaines bien définis (régime « $2T$ bruyant »). A la suite de cette crise, cette quasi-régularité est brisée par l'apparition sporadique d'impulsions d'amplitude intermédiaire de plus en plus nombreuses, au fur et à mesure que l'on va au-delà du point de crise. Dans ce cas, l'attracteur initial n'est pas détruit mais étendu. C'est aussi le cas de l'autre crise intérieure, présentée à la figure 3b, où l'extension a lieu au-delà de la cascade inverse et l'attracteur explore après la crise une région correspondant à des impulsions nettement plus grandes que celles du régime qui précède la crise. On peut tirer parti de ce fait pour séparer, dans la réponse, la partie correspondant à la zone nouvellement explorée de celle associée à l'attracteur avant la crise. Les impulsions observées sont alors pseudo-périodiques, elles se présentent sous forme d'un grand pic toutes les n périodes avec $n = 3, 5, \dots$. Tout se passe comme si l'attracteur entrait en collision avec un cycle instable nT et qu'après quelques oscillations à cette période, le système retrouvait l'état chaotique initial qui représente en quelque sorte l'état fondamental du système.

Dans les crises de frontière, l'attracteur initial est détruit et laisse la place à un attracteur dont les caractéristiques ne présentent pas de continuité avec celles de l'attracteur avant la crise. C'est ce type de crise qui a été observé dans nos expériences quand le régime chaotique issu de la cascade de doublement de période laisse place à un régime $3T$ périodique. Diverses raisons mentionnées au paragraphe précédent permettent d'affirmer que ce régime est différent de celui des fenêtres périodiques liées aux bifurcations tangentes qui apparaissent dans le scénario classique de doublement de période.

L'existence de crises, leurs caractéristiques et notamment la continuité décrite ci-dessus, sont bien restituées par les simulations numériques effectuées sur le modèle à deux niveaux du laser, présenté dans le paragraphe précédent. A titre d'exemple, la figure 3 montre les diagrammes de bifurcation obtenus pour deux valeurs modérées du désaccord δ de la cavité laser. Elle illustre la variation de ces diagrammes de bifurcation avec δ et notamment l'apparition de crises et le déplacement des points de bifurcation vers les faibles valeurs de m quand δ augmente. En ce qui concerne les crises, on remarque pour $\delta = 0,12$ (a), une crise intérieure (CI) au début de la cascade inverse et une crise de frontière (CF) dans la zone où le chaos est pleinement développé. Pour $\delta = 0,16$ (b), la crise de frontière a disparu pour laisser la place à une deuxième crise intérieure. Un examen attentif de la crise de frontière obtenue pour $\delta = 0,12$ montre que c'est un attracteur $5T$ qui apparaît dans cette crise, attracteur dont l'existence a pu être vérifiée expérimentalement [7]. Dans la première crise intérieure, présentée sur les deux diagrammes de la figure 3, les valeurs échantillonnées après la crise se situent bien entre les deux branches de la cascade inverse et occupent tout l'intervalle correspondant, tandis que lors de la seconde, qui n'apparaît qu'en figure 3b, la nouvelle région explorée correspond à des valeurs échantillonnées sensiblement plus importantes que celles obtenues avant la crise, tout comme dans les diagrammes de bifurcation expérimentaux (cf. Fig. 4b).

Le modèle à deux niveaux du laser CO₂ à paramètres modulés s'avère donc fournir une représentation très fidèle de la réponse non linéaire de ce laser. Non seulement il produit le bon scénario de transition vers le chaos pour des paramètres proches des paramètres expérimentaux, mais il reflète aussi très bien la riche phénoménologie de ce type de laser. Une exploration systématique des diagrammes de bifurcation pour différentes valeurs du paramètre de pompage A et de l'indice de modulation m actuellement en cours, devrait permettre de mieux cerner le domaine d'existence des effets de bi- ou de multistabilité et peut-être révéler l'existence d'autres phénomènes chaotiques dans ce type de laser.

*Manuscrit reçu le 13 janvier 1987,
accepté le 3 avril 1987.*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] COLLINS (R. J.), NELSON (D. F.), SCHAWLOW (A. L.), BOND (W.), GARRETT (C. G. B.), KAISER (W.). Coherence, narrowing, directionality, and relaxation oscillations in the light emission from ruby. *Phys. Rev. Lett.*, USA (Oct. 1, 1960), **5**, n° 7, pp. 303-305.
- [2] STATZ (H.), MARS (G. de). Transients and oscillation pulses in masers. *Quantum Electronics* édité par TOWNES (C. H.), Columbia University Press, New York (1960), pp. 530-537.
- [3] BOYD (R. W.), RAYMER (M. G.), NARDUCCI (L. M.). Optical instabilities. *Cambridge University Press*, Cambridge GB (1986).
- [4] Voir par exemple GRASZYUK (A. Z.), ORAYEVSKIY (A. N.). Transients processes in molecular oscillators. *Radio Engng. Electron. Phys.*, USA (mars 1964), **9**, n° 3, pp. 424-429, trad. ang. de *Radiotckh. i Elektron.* (1964), **9**, n° 3, pp. 524-532.
- [5] BERGE (P.), POMEAU (Y.), VIDAL (C.). L'ordre dans le chaos. *Hermann*, Paris (1984).
- [6] ARECCHI (F. T.), MEUCCI (R.), PUCCIONI (G. P.), TREDICCE (J. R.). Experimental evidence of subharmonic bifurcations, multistability and turbulence in a Q-switched gas laser. *Phys. Rev. Lett.*, USA (25 Oct. 1982), **49**, n° 17, pp. 1217-1220.
- [7] HENNEQUIN (D.). Chaos dans un laser CO₂ à modulation interne. *Thèse de doctorat*, Lille I (1987).
- [8] MIDAVAINÉ (T.), DANGOISSE (D.), GLORIEUX (P.). Observation of chaos in a frequency-modulated CO₂ laser. *Phys. Rev. Lett.*, USA (Nov. 4, 1985), **55**, n° 19, pp. 1989-1992.
- [9] DANGOISSE (D.), GLORIEUX (P.), HENNEQUIN (D.). Chaotic phenomena in a CO₂ laser with internal modulation in *Optical Chaos* édité par CHROSTOWSKI (J.), ABRAHAM (N. B.), *Proc. SPIE* 667, pp. 242-247 (1986).
- [10] DANGOISSE (D.), GLORIEUX (P.), HENNEQUIN (D.). Laser chaotic attractors in crisis. *Phys. Rev. Lett.*, USA (Nov. 24, 1986), **57**, n° 21, pp. 2657-2660.
- [11] DUPRE (J.), MEYER (F.), MEYER (C.). Influence des phénomènes de relaxation sur la forme des impulsions fournies par un laser CO₂ déclenché par un absorbant saturable. *Rev. Phys. Appl.*, Paris (sept. 1975), **10**, n° 5, pp. 285-293.
- [12] GREBOGI (C.), OTT (E.), YORKE (J. A.). Crises, sudden changes in chaotic attractors and transient chaos. *Physica*, Amsterdam (mai 1983), **7D**, nos 1-3, pp. 181-200.
GREBOGI (C.), OTT (E.), YORKE (J. A.). Chaotic attractors in crisis. *Phys. Rev. Lett.*, USA (31 mai 1982), **48**, n° 22, pp. 1507-1510.